

# 餅乾的數學世界

數學科考試（每題十分）

- + 大名—曹秉鈞（也是眾所皆知的曹 bird）
- 綽號—曹 bird、餅乾、曹操、基秉鈞、鳥飼料、小 bird、小 birdbird、曹你\*！！？
- × 性別—男生（絕不會雙性！）
- ÷ 生日—1999年7月24日（切記這個數字！）
- √ 星座—獅子座（喝～不嚇人嗎）
- ≠ 血型— $A+B=AB$ ！（最神奇的血型）
- ≡ 生肖—兔子（我跳、我跳、碰、撞牆）
- ∫ 興趣—玩、彈鋼琴、算數學、運動（多到數不清）
- ± 專長—算數學（就只有這樣）
- ∞ 特色—數學很強！其他都很爛.....



恭喜你通過這個困難的數學考驗，答案於下

## 大家對餅乾的建議與解答

1. 姜沛韶：別太急躁，做不好的。
2. 褚奕辰：人小志氣高這句話分明就是為你量身打造的，希望你以後在解釋數學的時候，能更簡單一些～
3. 周庚翰：曹ㄉ兒...還是愛因斯坦，你的專題研究還真的是會讓人讀得很辛苦
4. 謝政霖：數學超級資優的，以後一定要長高喔！XD
5. 林孟儒：數學能力太厲害了，專題研究沒幾個人看得懂，進國中後繼續加油喔！
6. 杜謙：小小一隻，腦容量那麼大，數學更是「變態」。
7. 溫彥勳：曹不兒（還是咬陰撕毯），雖然我完全看不懂你的研究（XD），不過你做得很認真啦～幫你點一個讚！
8. 林軒宇：餅乾~~長那麼小卻頭腦聰明 你的公式看得我眼花撩亂阿~~
9. 高允貞：小小一隻，好像被我當成玩具了 XD。雖然聽不懂你的數學，但對數學要持之以恆喔！
10. 陳庭儀：加油！！
11. 梁丞廷：你的數學好強(變態級的)！真好！！我好想像你一樣，這樣我的成績就會好一點了吧！
12. 林旻頌：多吃一點，這樣才會長高，不然其他人會以為你被虐待！

謝謝您的填寫，這項比賽項目你獲得

100分

# 18446744073709551615 之謎

## —河內之塔之最少步數與改造

研究者：曹秉鈞

台北市西湖國小資優班學生

聯絡電話：26576626

部落格：<http://www.1plus1is2.wordpress.com/>

Email：[johnny.tsao.880724@gmail.com](mailto:johnny.tsao.880724@gmail.com)

專業指導老師：吳侑邦老師

指導老師：卓麗容老師

## 第一章、緒論

### 第一節、研究動機

有一天，爸爸從辦公室帶回了一個遊戲。平時就對益智遊戲很感興趣的我，迫不及待的想拿來玩玩。而這個遊戲—河內之塔，在幾個小時內，我就用數學方法破解了移動規則。

因此我想要找出一套公式，能將河內之塔不同盤子數與木片數所需的最少步數中，再加以觀察寫出規則，最後找出一套只需帶入數字就能找出最少步數的公式。

### 第二節、研究目的

1. 探討不同木片數量在四根柱子時移動所需的最少步數(意即帶入木片數量，得出移動所需的步數)
2. 探討不同木片數量在五根柱子時移動所需的最少步數
3. 探討不同木片數量在六根柱子時移動所需的最少步數
4. 探討不同木片數量在七根柱子時移動所需的最少步數
5. 比較相同木片數量，柱子數量增加所需的移動次數關係
6. 綜合上述，找出能套用任何柱子與木片移動所需的最少步數的公式

## 第二章、文獻探討

### 第一節、 甚麼是河內之塔

傳說在古老的印度，有一座神廟，據說它是宇宙的中心。在廟宇中放置了一塊上面插有三根長木釘的木板，在其中的一根木釘上，從上至下被放置了 64 片直徑由小到大的圓環形金屬片。古印度教的天神指示祂的僧侶們將 64 片的金屬片移至三根木釘中的其中一根上。規定在每次的移動中，只能搬移一片金屬片，並且在過程中必須保持金屬片由上至下是直徑由小至大的次序，也就是說不論在那一根木釘上，圓環形的金屬片都是直徑較小的被放在上層。

直到有一天，僧侶們能將 64 片的金屬片依規則從指定的木釘上全部移動至另一根木釘上，那麼，世界末日即隨之來到，世間的一切終將被毀滅，萬物都將至極樂世界。

### 第二節、 河內之塔的規則

基本款的河內之塔包括的配件有大小不同的七片木片、三根柱子、木板（基座）

- 一、首先將所有木片由大到小的往上排列
- 二、一次移動一個木片、但不能將大的木片蓋在小的木片上
- 三、利用剩下的兩根柱子將整座塔移到另一根柱子上

### 第三節、 科展資料分析

中小學科學展覽會中，關於河內之塔的科展作品有許多值得我分析的作品，本研究整理分析如下表：

參展組別	研究主題	研究摘要
第27 屆 國小組	河內寶塔與九 連環	將河內塔與九連環做比較，並得出柱子數越多，所需的最少步數就越少。
第43 屆 高中組	將錯就錯 Knuth 河內塔	對河內之塔做出變更及研發，進而推出玩法。
第46 屆 國中組	河內塔問題	對三根柱子的河內之塔做研究，研究木片數增加的情形。
第49 屆 國中組	三柱輪換之移 動策略----雞 尾酒法	研究三根柱子的河內之塔最少步數及公式。

第50 屆 小學組	數學101~河內 塔變身！	這個研究的主題是由河內塔遊戲延伸而成的，他們除了增加河內塔的柱數探討外，並另作形狀變化，探討最少步數間的規律，並歸納推論出數學式。
--------------	------------------	---

本研究主要參考民國 99 年第 50 屆全國中小學科展作品數學科第二名：數學 101

~河內塔變身！

民國 99 年第 50 屆全國中小學科展作品數學科第二名科展資料中五根柱子的公式如下：

當  $X=5, 1 \leq Y \leq 4$  時，數學式為  $T=2Y-1$

當  $X=5, 4 \leq Y \leq 10$  時，數學式為  $T=4Y-9$

…依序類推

X=5										
Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T	1	3	5	7	11	15	19	23	27	31
Y	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111
Y	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
T	127	143	159	175	191	207	223	239	255	271

歸納推論出數學式：當  $X=5, 1 \leq Y \leq 4$  時，數學式為  $T=2Y-1$   
 當  $X=5, 4 \leq Y \leq 10$  時，數學式為  $T=4Y-9$   
 …依序類推

圖片來源：99 年第 50 屆全國中小學科展作品數學科第二名：數學 101~河內塔變身！

### 第三章、研究器材與方法

#### 一、研究器材

- 1.河內之塔遊戲：大小不同的七片木片、三根柱子、木板（基座）
- 2.電腦製作繪圖：大小不同的七片木片、四、五、六、七根柱子、基座

#### 二、研究方法

1. 將所有木片由大到小的往上排列
2. 分別測試一片、兩片、三片…需要多少步才能成功移位
3. 利用以上的數據所做出七片木片在三~七根柱子中移位的最少步數
4. 由數據中的規律探討公式

### 第四章、研究過程

#### 第一節、命名研究名詞

一、令每一塊木片由小到大分別命名為  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$ 、 $N_4$ … $N_7$

二、令每一根柱子由右向左分別命名為  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ 、 $S_4$ 、 $S_5$ （七片木片的移動所需的最少步數只需用到  $S_1$ 、 $S_2$ 、 $S_3$ ）

三、令需要移動的步數表示成  $S_T$ ， $S$  為木片數， $T$  為柱子數。舉例說： $3_4=9$



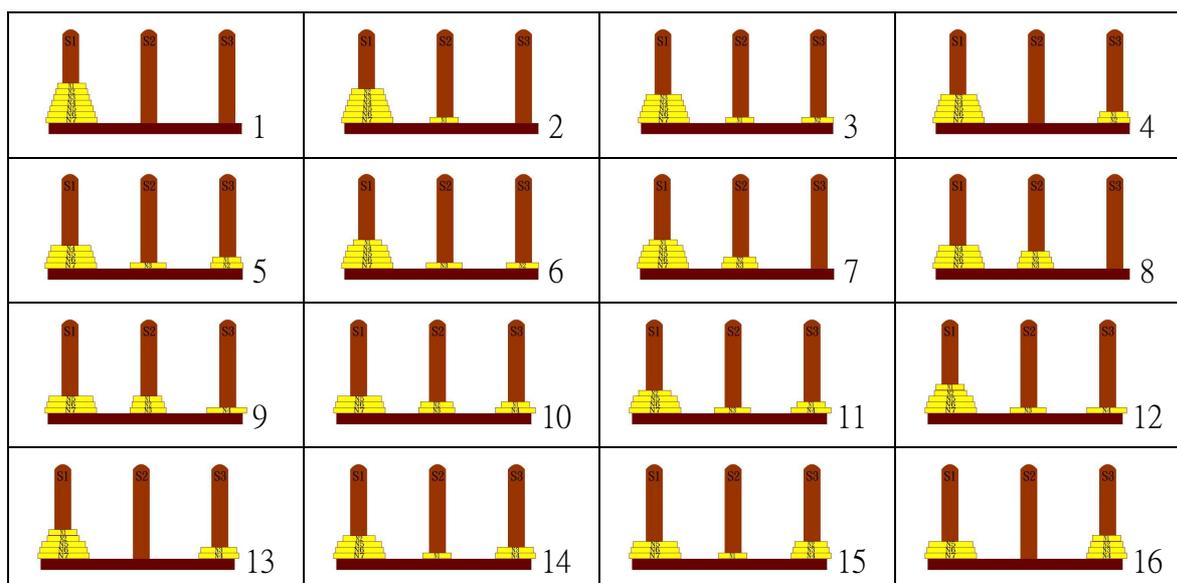
## 第二節、三根柱子的移動所需的最少步數之過程

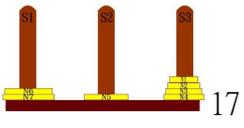
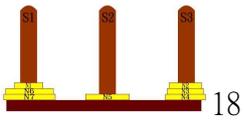
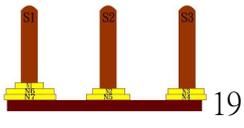
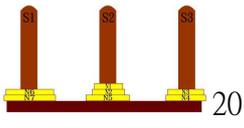
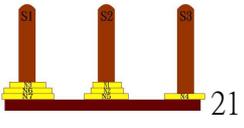
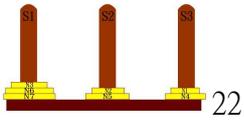
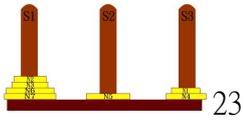
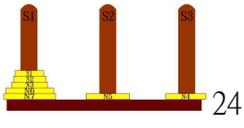
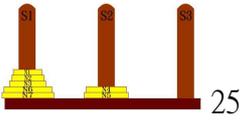
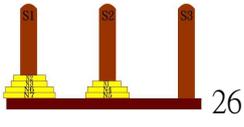
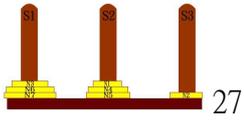
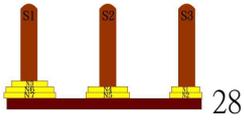
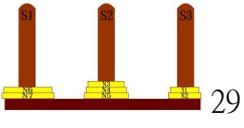
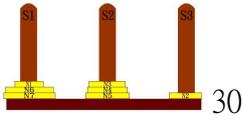
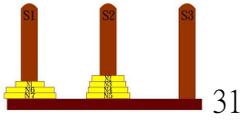
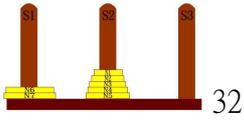
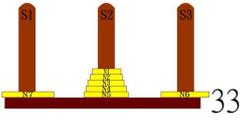
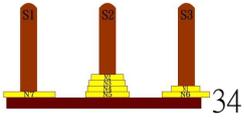
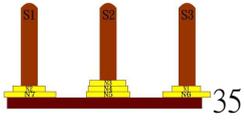
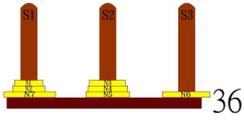
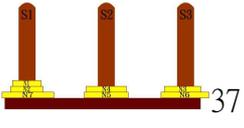
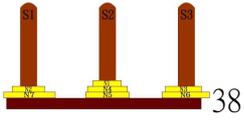
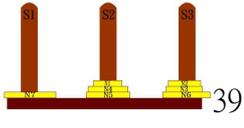
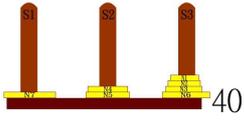
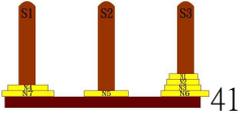
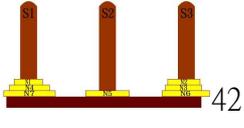
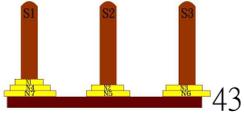
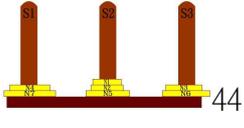
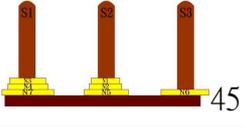
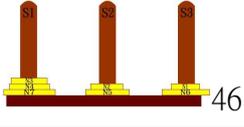
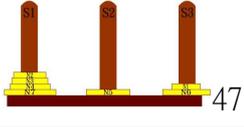
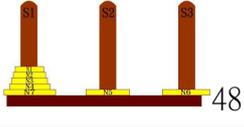
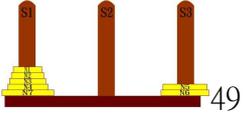
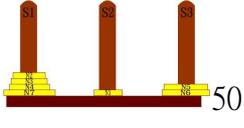
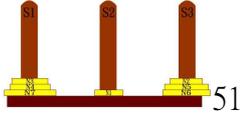
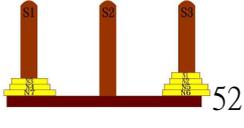
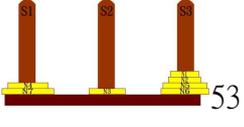
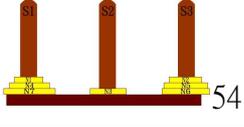
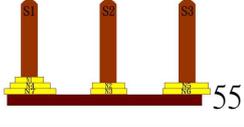
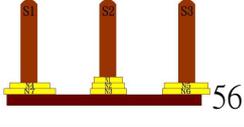
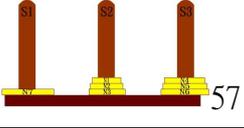
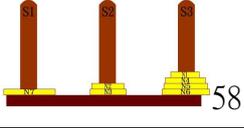
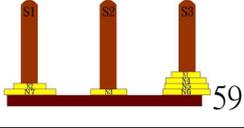
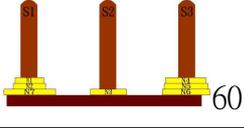
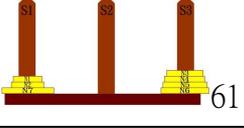
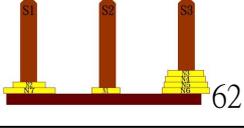
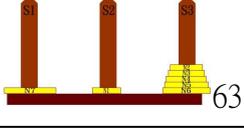
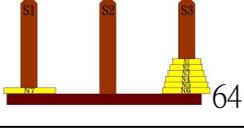
材料：大小不同的七片木片、三根柱子、木板（基座）



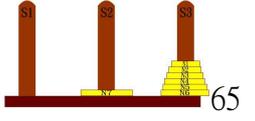
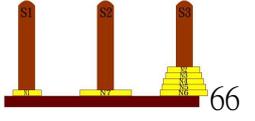
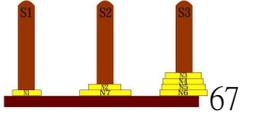
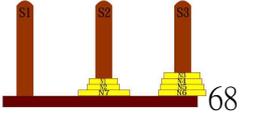
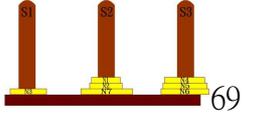
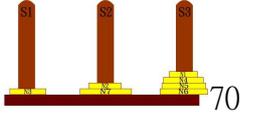
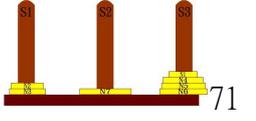
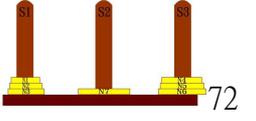
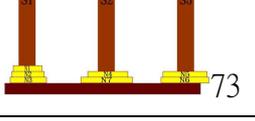
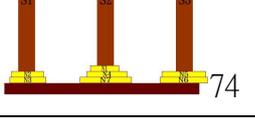
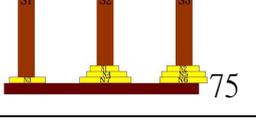
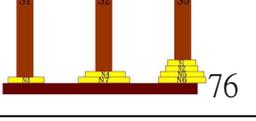
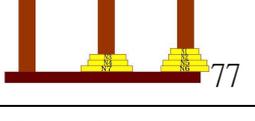
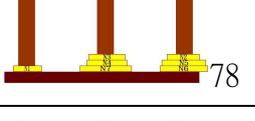
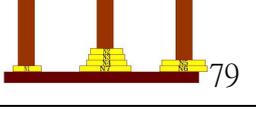
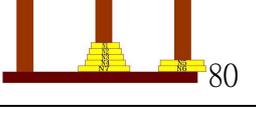
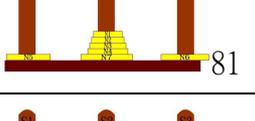
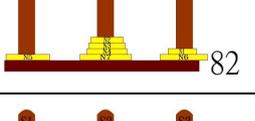
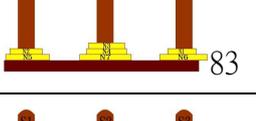
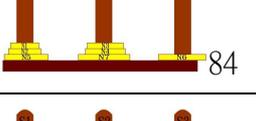
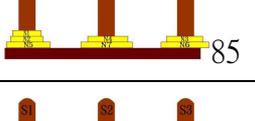
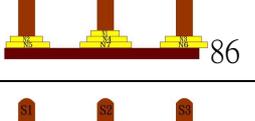
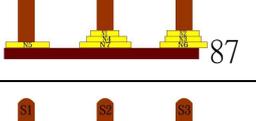
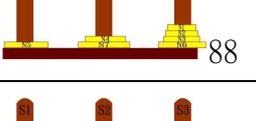
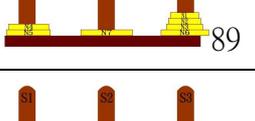
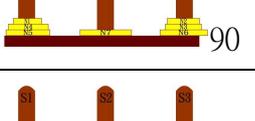
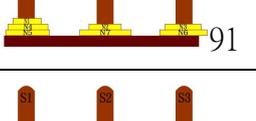
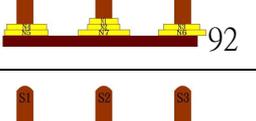
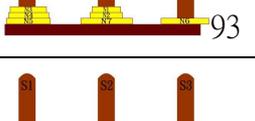
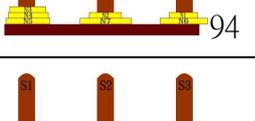
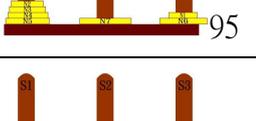
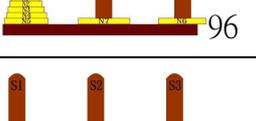
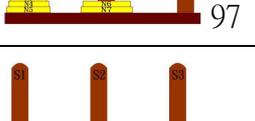
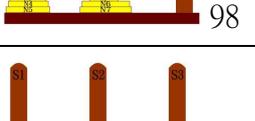
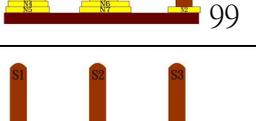
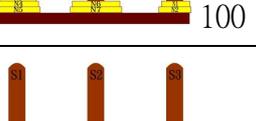
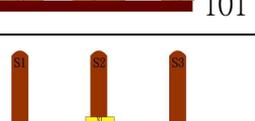
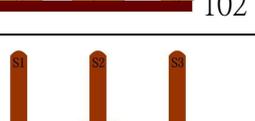
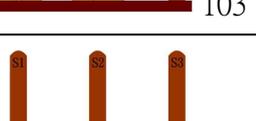
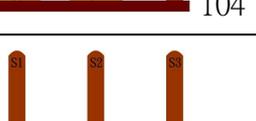
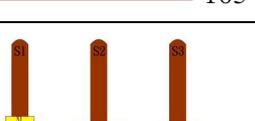
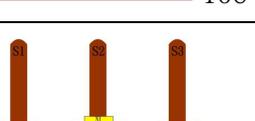
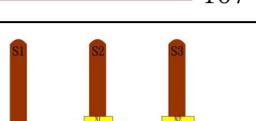
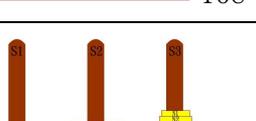
表一：三根柱子移動的步驟

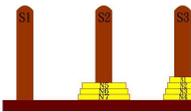
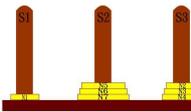
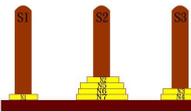
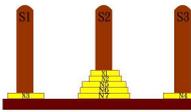
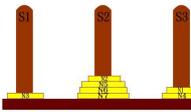
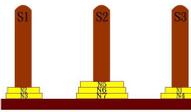
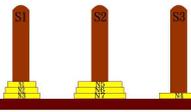
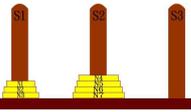
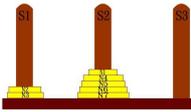
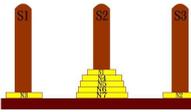
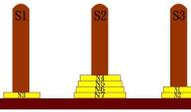
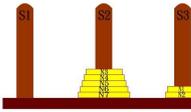
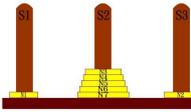
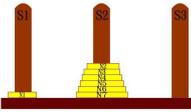
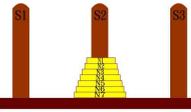
木片標號	步驟	移動次數
N1	將 N1 移至 S2	1
N2	將 N1 移至 S2、將 N2 移至 S3、將 N1 移至 S3	3
N3	將 N1 移至 S2、將 N2 移至 S3、將 N1 移至 S3 將 N3 移至 S2、將 N1 移至 S1、將 N2 移至 S2、將 N1 移至 S3	7
N4	將 N1 移至 S2、將 N2 移至 S3...將 N1 移至 S2	15
N5	將 N1 移至 S2、將 N2 移至 S3...將 N1 移至 S2	31
N6	將 N1 移至 S2、將 N2 移至 S3...將 N1 移至 S2	63
N7	將 N1 移至 S2、將 N2 移至 S3...將 N1 移至 S2	127



 17	 18	 19	 20
 21	 22	 23	 24
 25	 26	 27	 28
 29	 30	 31	 32
 33	 34	 35	 36
 37	 38	 39	 40
 41	 42	 43	 44
 45	 46	 47	 48
 49	 50	 51	 52
 53	 54	 55	 56
 57	 58	 59	 60
 61	 62	 63	 64

河內之塔的破解與改造

 65	 66	 67	 68
 69	 70	 71	 72
 73	 74	 75	 76
 77	 78	 79	 80
 81	 82	 83	 84
 85	 86	 87	 88
 89	 90	 91	 92
 93	 94	 95	 96
 97	 98	 99	 100
 101	 102	 103	 104
 105	 106	 107	 108
 109	 110	 111	 112

 113	 114	 115	 116
 117	 118	 119	 120
 121	 122	 123	 124
 125	 126	 127	 128
128 步-第 1 步=127 步			

圖一：三根柱子移動的歷程

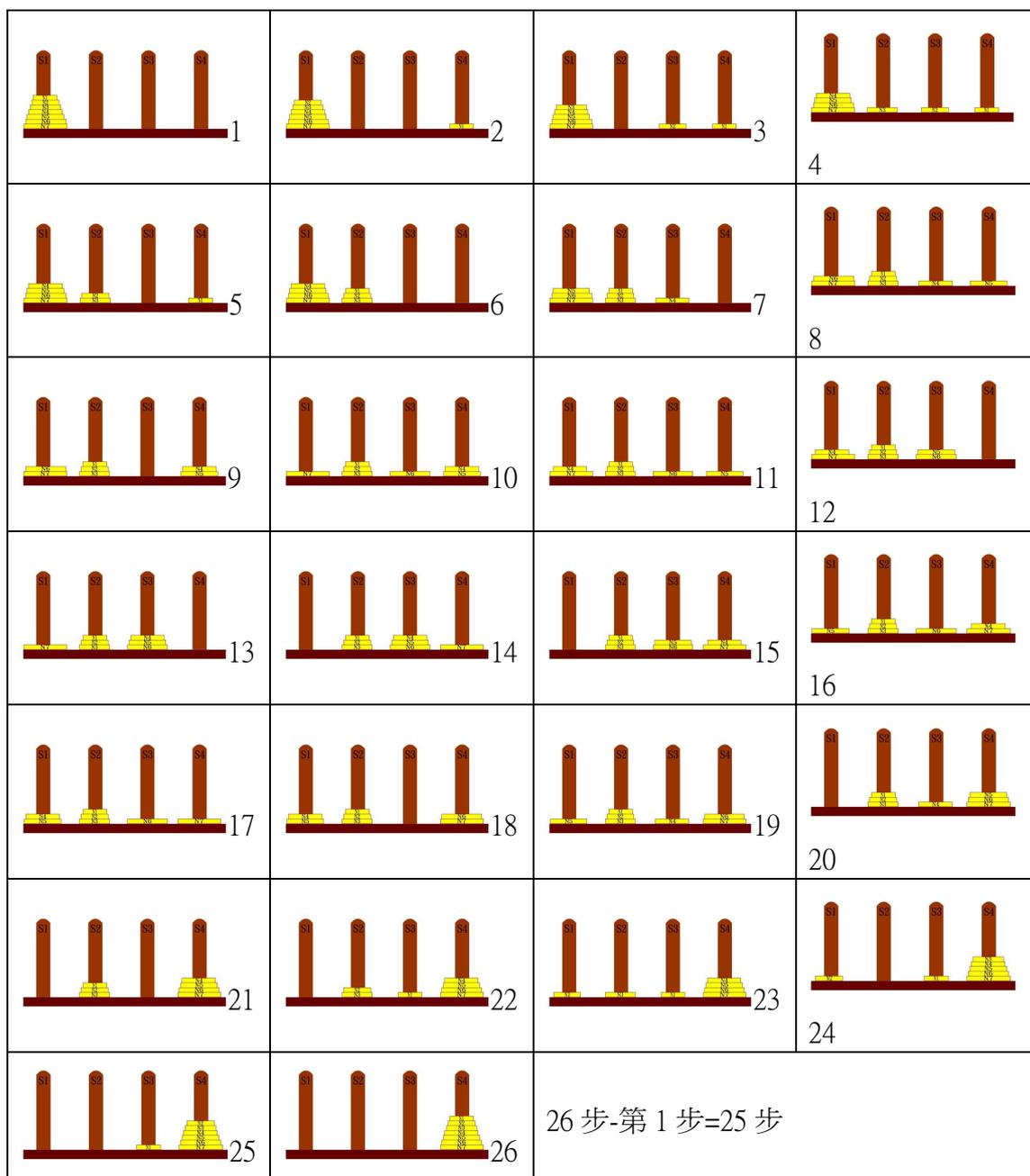
結果：三根柱子的移動所需的最少步數為 127 步

### 第三節、四根柱子的移動所需的最少步數之過程

材料：大小不同的七片木片、四根柱子、木板（基座）

表二：四根柱子移動的步驟

木片標號	步驟	移動次數
N1	將 N1 移至 S4	1
N2	將 N1 移至 S4、將 N2 移至 S3、將 N1 移至 S3	3
N3	將 N1 移至 S4、將 N2 移至 S3、將 N3 移至 S2、將 N2 移至 S2、將 N1 移至 S2	5
N4	將 N1 移至 S4、將 N2 移至 S3...將 N1 移至 S2	9
N5	將 N1 移至 S4、將 N2 移至 S3...將 N1 移至 S2	13
N6	將 N1 移至 S4、將 N2 移至 S3...將 N1 移至 S2	17
N7	將 N1 移至 S4、將 N2 移至 S3...將 N1 移至 S2	25



圖二：四根柱子移動的歷程

結果：四根柱子的移動所需的最少步數為 25 步

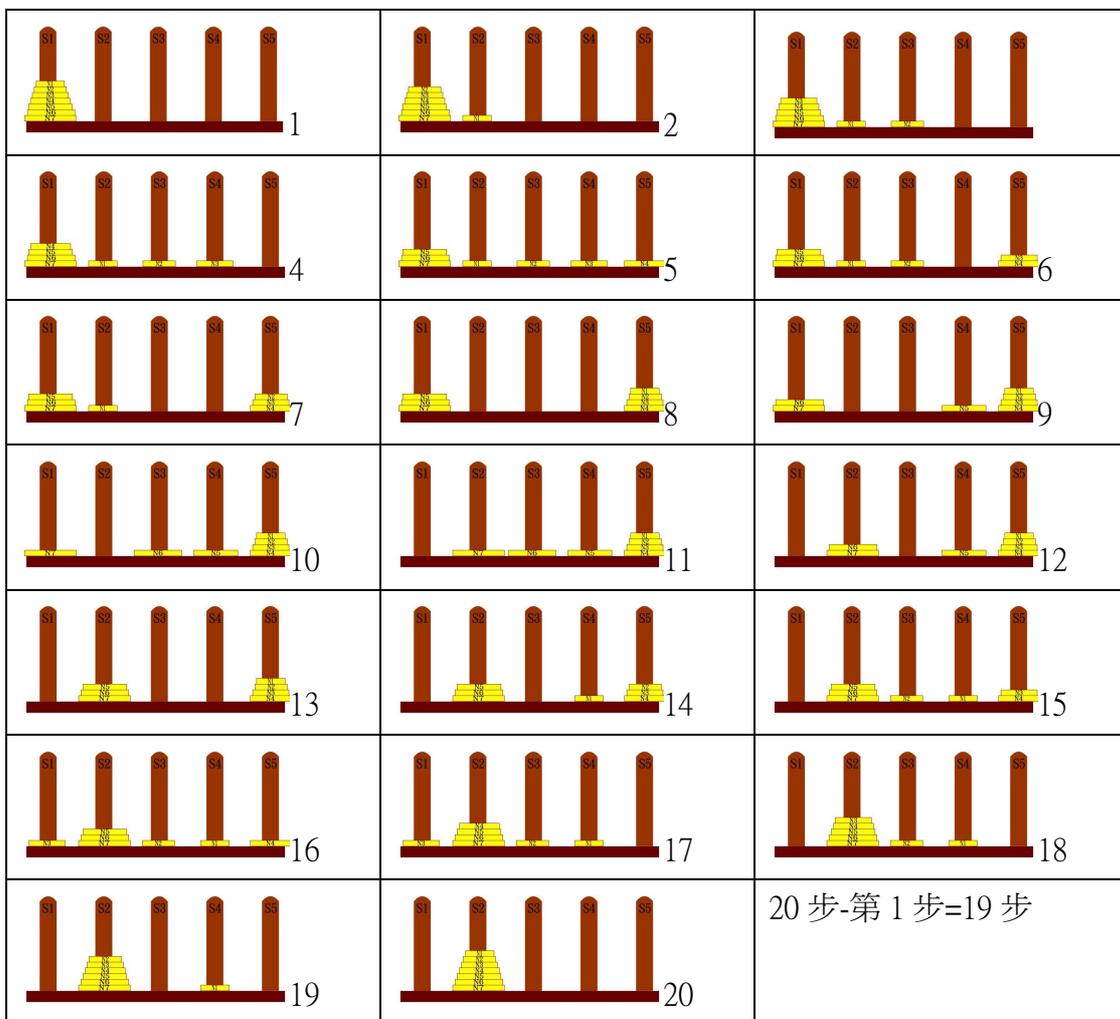
#### 第四節、五根柱子的移動所需的最少步數之過程

材料：大小不同的七片木片、五根柱子、木板（基座）

表三：五根柱子移動的步驟

木片標號	步驟	移動次數
N1	將 N1 移至 S5	1

N2	將 N1 移至 S5、將 N2 移至 S4、將 N1 移至 S4	3
N3	將 N1 移至 S5、將 N2 移至 S4、將 N3 移至 S3、將 N2 移至 S3、將 N1 移至 S3	5
N4	將 N1 移至 S5、將 N2 移至 S4、將 N3 移至 S3、將 N4 移至 S2、將 N3 移至 S2、將 N2 移至 S2、將 N1 移至 S2	7
N5	將 N1 移至 S4、將 N2 移至 S3...將 N1 移至 S2	11
N6	將 N1 移至 S4、將 N2 移至 S3...將 N1 移至 S2	15
N7	將 N1 移至 S4、將 N2 移至 S3...將 N1 移至 S2	19



圖三：五根柱子移動的歷程

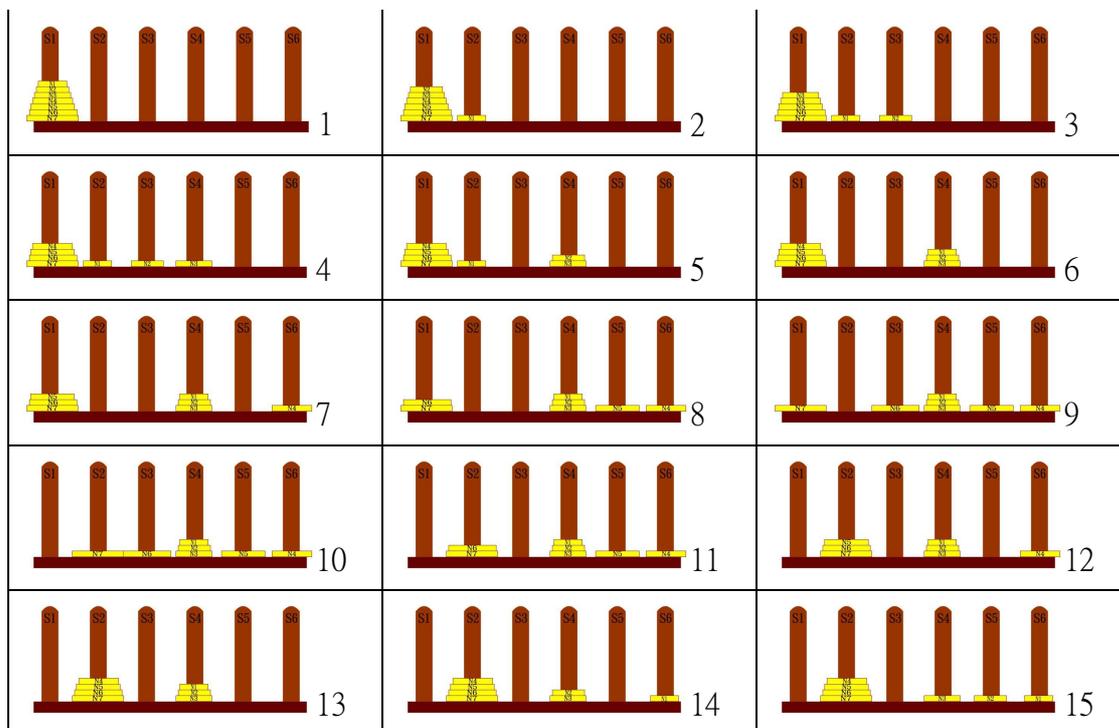
結果：五根柱子的移動所需的最少步數為 19 步

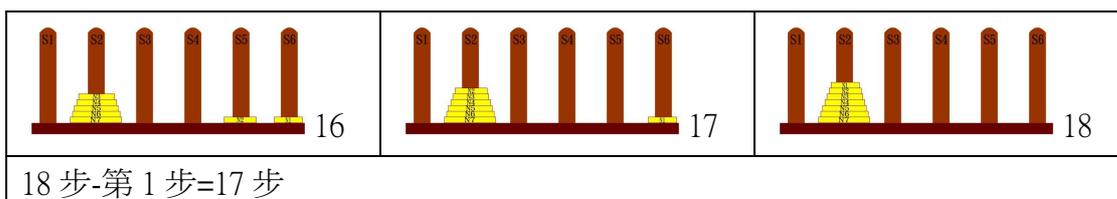
### 第五節、六根柱子的移動所需的最少步數之過程

材料：大小不同的七片木片、五根柱子、木板（基座）

表四：六根柱子移動的步驟

木片標號	步驟	移動次數
N1	將 N1 移至 S6	1
N2	將 N1 移至 S6、將 N2 移至 S5、將 N1 移至 S5	3
N3	將 N1 移至 S6、將 N2 移至 S5、將 N3 移至 S4、將 N2 移至 S4、將 N1 移至 S4	5
N4	將 N1 移至 S6、將 N2 移至 S5、將 N3 移至 S4、將 N4 移至 S3、將 N3 移至 S3、將 N2 移至 S3、將 N1 移至 S3	7
N5	將 N1 移至 S6、將 N2 移至 S5、將 N3 移至 S4、將 N4 移至 S3、將 N5 移至 S2、將 N3 移至 S2、將 N2 移至 S2、將 N1 移至 S2	11
N6	將 N1 移至 S5、將 N2 移至 S4...將 N1 移至 S1	15
N7	將 N1 移至 S5、將 N2 移至 S4...將 N1 移至 S1	19





18 步-第 1 步=17 步

圖四：六根柱子移動的歷程

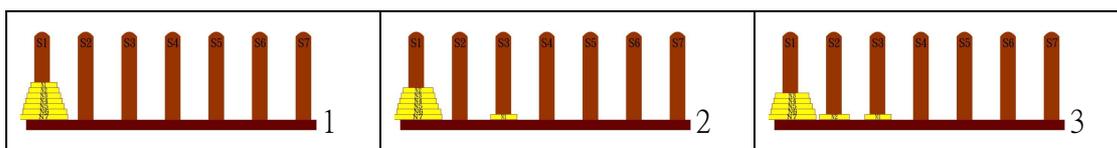
結果：六根柱子的移動所需的最少步數為 17 步

### 第六節、七根柱子的移動所需的最少步數之過程

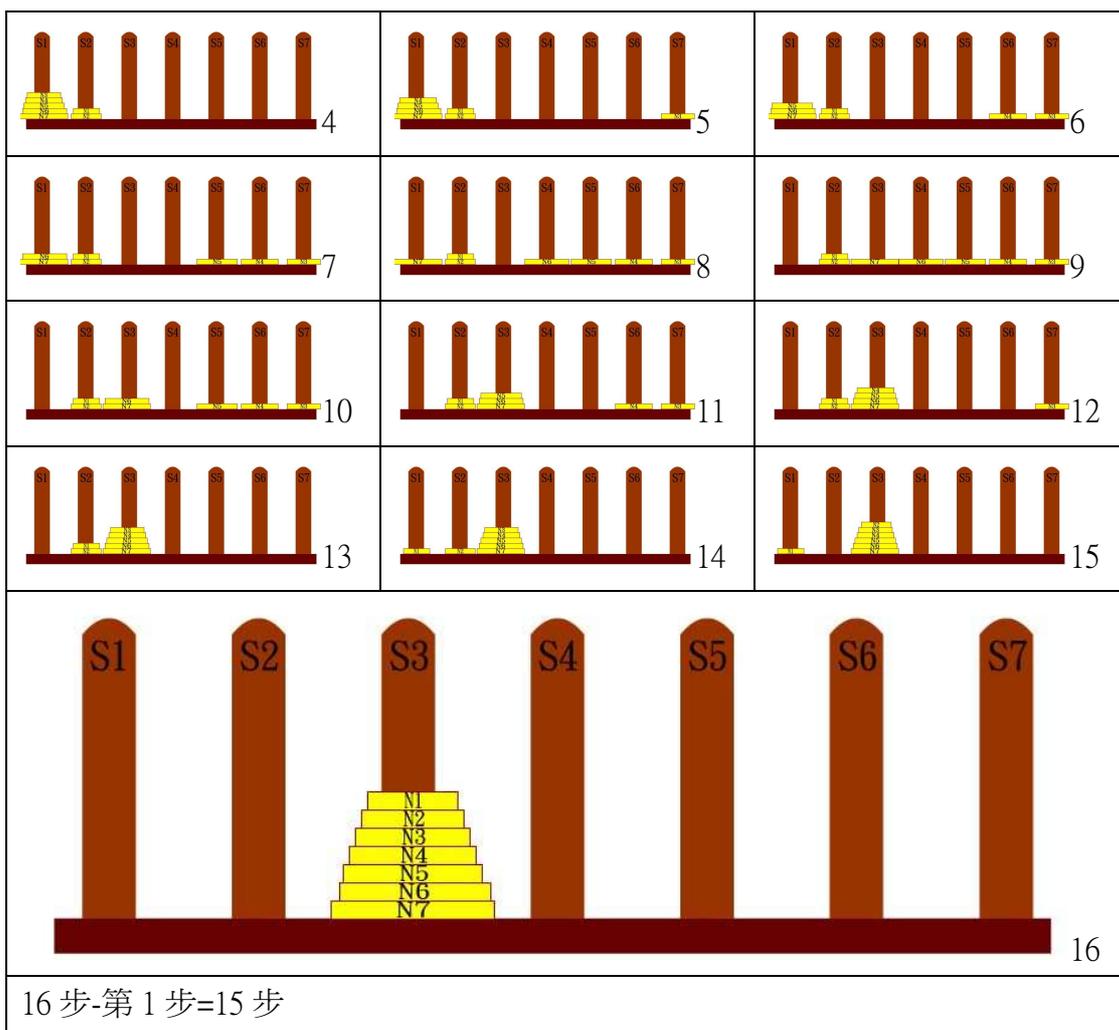
材料：大小不同的七片木片、五根柱子、木板（基座）

表五：七根柱子移動的步驟

木片標號	步驟	移動次數
N1	將 N1 移至 S7	1
N2	將 N1 移至 S7、將 N2 移至 S6、將 N1 移至 S6	3
N3	將 N1 移至 S7、將 N2 移至 S6、將 N3 移至 S5、將 N2 移至 S5、將 N1 移至 S5	5
N4	將 N1 移至 S7、將 N2 移至 S6、將 N3 移至 S5、將 N4 移至 S4、將 N3 移至 S4、將 N2 移至 S4、將 N1 移至 S4	7
N5	將 N1 移至 S7、將 N2 移至 S6、將 N3 移至 S5、將 N4 移至 S4、將 N5 移至 S3、將 N4 移至 S3、將 N3 移至 S3、將 N2 移至 S3、將 N1 移至 S3	9
N6	將 N1 移至 S7、將 N2 移至 S6、將 N3 移至 S5、將 N4 移至 S4、將 N5 移至 S3、將 N6 移至 S2、將 N5 移至 S2、將 N4 移至 S2、將 N3 移至 S2、將 N2 移至 S2、將 N1 移至 S2	11
N7	將 N1 移至 S6、將 N2 移至 S5...將 N1 移至 S1	15



河內之塔的破解與改造



圖五：七根柱子移動的歷程

結果：七根柱子的移動所需的最少步數為 16 步

## 第五章、研究結果

### 第一節、公式定義

令  $n$  為某根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的木片數時，只有在  $N$  為某些特定的數字時才會出現規律（此時計算式中的  $x$  為 1 2 3 4 5），因此：首先要將  $N$  帶入計算式中並求出  $x$ 、 $y$ （類似商數與餘數），再由  $x$ 、 $y$  帶入公式才能求出  $n$ （某根柱子移動所需的最少步數需要的步數）。

表六：求得  $x$  的計算式表

柱子數	求出 $x$ 的計算式	$N$ 出現規律的數字	公式算法
四根柱子	$x(x+1)/2 \leq N < (x+1)(x+2)/2$	因為 $N=1\ 3\ 6\ 10\ 15$ 時才會出現規律	$x=1\ 2\ 3\ 4\ 5$ 時帶入高斯定律公式 $x(x+1)/2$ 便能得到 $N=1\ 3\ 6\ 10\ 15$
五根柱子	$x(x+1)(x+2)/6 \leq N < (x+1)(x+2)(x+3)/6$	因為 $N=1\ 4\ 10\ 20\ 35$ 時才會出現規律	$x=1\ 2\ 3\ 4\ 5$ 時帶入高斯定律公式 $x(x+1)/2$ 兩次也就是帶入 $x(x+1)(x+2)/6$ 便能得到 $N=1\ 4\ 10\ 20\ 35$
六根柱子	$x(x+1)(x+2)(x+3)/24 \leq N < (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)/24$	$N=1\ 5\ 15\ 35\ 70$ 時才會出現規律	$x=1\ 2\ 3\ 4\ 5$ 時帶入高斯定律公式 $x(x+1)/2$ 三次也就是帶入 $x(x+1)(x+2)(x+3)/24$ 便能得到 $N=1\ 5\ 15\ 35\ 70$

舉例：五根柱子的公式化簡過程：

令  $n$  為五根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的木片數，而只有在  $N=1\ 4\ 10\ 20\ 35$  時才會出現規律（此時下計算式的  $x$  為 1 2 3 4 5），因此將  $N$  的數值帶入下計算式求出最大值

$$x(x+1)(x+2)/6 \leq N < (x+1)(x+2)(x+3)/6 \quad N - x(x+1)(x+2)/6 = y$$

由  $x$ 、 $y$  帶入下式，得到  $n$ （五根柱子移動所需的最少步數需要的步數）

$n$  為：

$$2^x \cdot [x(x+1)/2 - x + 1 + y] - 1$$

所以五根柱子的移動所需的最少步數的公式為  $2^x \cdot [x(x+1)/2 - x + 1 + y] - 1$

## 第二節、三根柱子的移動所需的最少步數公式分析

完成移動的木片數量	1	2	3	4	5	6	7
需要的步數	1	3	7	15	31	63	127
多一片木片增加的步數	1	2	4	8	16	32	64

公式的化簡過程：

令  $n$  為三根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的移位數， $x=N$ 。

$n$  為： $2^x-1$

所以三根柱子的移動所需的最少步數的公式為  $2^x-1$

## 第二節、四根柱子的移動所需的最少步數公式分析

完成移動的木片數量	1	2	3	4	5	6	7
需要的步數	1	3	5	9	13	17	25
多一片木片增加的步數	1	2	2	4	4	4	8

公式的化簡過程：

令  $n$  為四根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的木片數，而只有在  $N=1\ 3\ 6\ 10\ 15$  時才會出現規律（此時計算式中的  $x$  為  $1\ 2\ 3\ 4\ 5$ ），因此將  $N$  的數值帶入下計算式求出  $x$ 、 $y$  最大值

$$x(x+1)/2 \leq N < (x+1)(x+2)/2 \quad N-x(x+1)/2=y$$

由  $x$ 、 $y$  帶入下式，得到  $n$ （四根柱子移動所需的最少步數需要的步數） $n$  為：

$$1+2^1 \cdot 2+2^2 \cdot 3+2^3 \cdot 4+2^4 \cdot 5 \cdots +2^{x-1} \cdot x+2^x y$$

$$(1+2^1+2^2+2^3+2^4 \cdots +2^{x-1})+(2^1+2^2+2^3+2^4 \cdots +2^{x-1})+(2^2+2^3+2^4 \cdots +2^{x-1}) \cdots +(2^{x-2}+2^{x-1})+2^{x-1}+2^x y$$

$$2^x-1+2^x-2^1+2^x-2^2+2^x-2^3+2^x-2^4 \cdots +2^x-2^{x-1}+2^x y$$

$$2^x \cdot (x-1+y)-1$$

所以四根柱子的移動所需的最少步數的公式為  $2^x \cdot (x-1+y)-1$

### 第三節、五根柱子的移動所需的最少步數公式分析

完成移動的木片數量	1	2	3	4	5	6	7
需要的步數	1	3	5	7	11	15	19
多一片木片增加的步數	1	2	2	2	4	4	4

公式的化簡過程：

令  $n$  為五根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的木片數，而只有在  $N=1\ 4\ 10\ 20\ 35$  時才會出現規律（此時下計算式的  $x$  為  $1\ 2\ 3\ 4\ 5$ ），因此將  $N$  的數值帶入下計算式求出  $x$ 、 $y$  最大值

$$x(x+1)(x+2)/6 \leq N < (x+1)(x+2)(x+3)/6 \quad N - x(x+1)(x+2)/6 = y$$

由  $x$ 、 $y$  帶入下式，得到  $n$ （五根柱子移動所需的最少步數需要的步數） $n$  為：

$$(2^x - 2^0) \cdot 1 + (2^x - 2^1) \cdot 2 + (2^x - 2^2) \cdot 3 \cdots (2^x - 2^{x-1}) \cdot x + 2^x y$$

$$(2^x \cdot x - 2^x + 1) + (2^x \cdot (x-1) - 2^x + 2^1) + (2^x \cdot (x-2) - 2^x + 2^2) \cdots + (2^x \cdot 1 - 2^x + 2^{x-1}) + 2^x y$$

$$2^x \cdot x(x+1)/2 - [2^x x(x-1) + 1(\text{四根柱子})] + 2^x y$$

$$2^x \cdot [x(x+1)/2 - x + 1 + y] - 1$$

所以五根柱子的移動所需的最少步數的公式為  $2^x \cdot [x(x+1)/2 - x + 1 + y] - 1$

### 第四節、六根柱子的移動所需的最少步數公式分析

完成移動的木片數量	1	2	3	4	5	6	7
需要的步數	1	3	5	7	9	13	17
多一片木片增加的步數	1	2	2	2	2	4	4

公式的化簡過程：

令  $n$  為六根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的木片數，而只有在  $N=1\ 5\ 15\ 35\ 70$  時才會出現規律（此時下計算式的  $x$  為  $1\ 2\ 3\ 4\ 5$ ），因此

將 N 的數值帶入下計算式求出 x、y 最大值

$$x(x+1)(x+2)(x+3)/24 \leq x < (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)/24 \quad N - x(x+1)(x+2)(x+3)/24 = y$$

由 x、y 帶入下式，得到 n（六根柱子移動所需的最少步數需要的步數）n 為：

$$(2x-20) \cdot 1 + (2x-21) \cdot 3 + (2x-22) \cdot 6 \cdots (2x-2x-1) \cdot x(x+1) + 2xy$$

$$(2x \cdot x - 2x + 1) + (2x \cdot (x-1) - 2x + 21) + (2x \cdot (x-2) - 2x + 22) \cdots + (2x \cdot 1 - 2x + 2x - 1) + 2xy$$

$$2x \cdot \{ x(x+1)/2 - [(x-1)+1(\text{四根柱子})] \} (\text{五根柱子}) + 2xy$$

$$2x \cdot \{ x(x+1)(x+2)/6 - [x(x+1)/2 - x + 1] + y \} - 1$$

所以六根柱子的移動所需的最少步數的公式為  $2x \cdot \{ x(x+1)(x+2)/6 - [x(x+1)/2 - x + 1] + y \} - 1$

### 第五節、七根柱子的移動所需的最少步數公式分析

完成移動的木片數量	1	2	3	4	5	6	7
需要的步數	1	3	5	7	9	11	15
多一片木片增加的步數	1	2	2	2	2	2	4

公式的化簡過程：

令 n 為七根柱子移動所需的最少步數需要的步數，N 為完成的木片數，而只有在 N=1 6 21 56 105 時才會出現規律（此時下計算式的 x 為 1 2 3 4 5），因此將 N 的數值帶入下計算式求出 x、y 最大值

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)/120 \leq x < (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)/120$$

$$N - x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)/120 = y$$

由 x、y 帶入下式，得到 n（七根柱子移動所需的最少步數需要的步數）n 為：

$$2x \cdot x(x+1)(x+2)(x+3)/24 - \{ x(x+1)(x+2)/6 - [x(x+1)/2 - x + 1] + y \} - 1$$

所以七根柱子的移動所需的最少步數的公式為

$$2x \cdot x(x+1)(x+2)(x+3)/24 - \{ x(x+1)(x+2)/6 - [x(x+1)/2 - x + 1] + y \} - 1$$

### 第六節、綜合柱子的移動所需的最少步數關係

表七：綜合柱子的移動所需的最少步數關係表一

木片數	1	2	3	4	5	6	7
2的次方 柱數	$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$	$2^6$
三根柱子	1	1	1	1	1	1	1
四根柱子	1	2	3	4	5	6	
五根柱子	1	3	6	10	15		
六根柱子	1	4	10	20			
七根柱子	1	5	15				
八根柱子	1	6					
九根柱子	1						

上述表格說明：

- 一、 上面的圖的數字是代表 n 根柱子 m 個木片時的移動步數  $2^n$  分別有幾個，例如說，四根柱子三片木片是由 1 個  $2^0$ +2 個  $2^1$ +3 個  $2^2$  所相加成，不是只有 3 個  $2^2$
- 二、 1, (1 1), (1 3 3 1), (1 4 6 4 1)……分別為  $(x+1)^0$ 、 $(x+1)^1$ 、 $(x+1)^2$ 、 $(x+1)^3$ 、 $(x+1)^4$ ……的各項係數（11 的次方）也就是巴斯卡三角形。並從此關係中推導出下圖

1  
 1 1  
 1 2 1  
 1 3 3 1  
 1 4 6 4 1  
 1 5 10 10 5 1  
 1 6 15 20 15 6 1  
 1 7 21 35 35 21 7 1  
 1 8 28 56 70 56 28 8 1  
 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1  
 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1  
 ...

(每一個數都是上面的兩個數相加)

表八：綜合柱子的移動所需的最少步數關係表二

	$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5 \dots$	$2^x$
三根柱子	1	1	1	1	1	1	1
四根柱子	1	2	3	4	5	6	$X+1$
五根柱子	1	1+2	1+2+3	1+2+3+4	1+2+3+4+5	1+2+3+4+5+6	1+2+3+4+5+6+... $x+1$
六根柱子	1	1+ 1+2	1+ 1+2+ 1+2+3	1+ 1+2+ 1+2+3+ 1+2+3+4	1+ 1+2+ 1+2+3+ 1+2+3+4+ 1+2+3+4+5	1+ 1+2+ 1+2+3+ 1+2+3+4+ 1+2+3+4+5+ 1+2+3+4+5+6	1+ 1+2+ 1+2+3+ 1+2+3+4+ 1+2+3+4+5... 1+2+...x+1

上述表格說明：同一列樣顏色部分加總會等於下一列顏色部分。也就是說第 n 行的第 m 個數字是前一行第一個數字至第 m 個數字的總合。

套用高斯定律的公式： $x(x+1)/2$

(1 帶入得  $1(1+1)/2=1$  2 帶入得  $2(2+1)/2=3 \dots$ 等)

第一次帶 1 1 1 1 1 ... : 1 2 3 4 5 ...

第二次帶 1 2 3 4 5 ... : 1 3 6 10 15 ...

第三次帶 1 3 6 10 15 ... : 1 4 10 20 35 ...

第四次帶 1 4 10 20 35 ... : 1 5 15 35 70 ...

第五次帶 1 5 15 35 70 ... : 1 6 21 56 126 ...

第六次帶 1 6 21 56 126 ... : 1 7 28 84 210 ...

.....

便能推導規律

表九：綜合柱子的移動所需的最少步數關係表三

柱子數	$2^n$ 的係數
三根柱子	1
四根柱子	$x-1$
五根柱子	$x(x+1)/2-(x-1)$
六根柱子	$x(x+1)(x+2)/6-[x(x+1)/2-(x-1)]$
七根柱子	$x(x+1)(x+2)(x+3)/24-\{x(x+1)(x+2)/6-[x(x+1)/2-(x-1)]\}$
...	...
m 個柱子	$\{(x+m-4)! / (m-4)! x! - [(x+m-5)! / (m-5)! x! - \dots 1] / (x-1)!\}$

能發現每一次都會多出一個多項式並減掉上一行的公式，如

$x(x+1)(x+2)/6-[x(x+1)/2-(x-1)]$  (六根柱子的公式) 是  $x(x+1)(x+2)/6- x(x+1)/2-(x-1)$  (五根柱子的公式)多一個  $x(x+1)(x+2)/6$ 。令此類多項式為 集合 L，因此將每一次多出來的集合 L 整理出，簡化為下表：

柱子數	集合 L
三根柱子	1
四根柱子	$x$
五根柱子	$x(x+1)/2$
六根柱子	$x(x+1)(x+2)/6$
七根柱子	$x(x+1)(x+2)(x+3)/24$
...	...
m 個柱子	$(x+m-4)! / (m-4)! (x-1)!$

公式的化簡過程：

令  $n$  為四根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的木片數，而只有在  $N=1$ 、 $(x+m-3)! / (x-1)! (m-3)!$ 、 $(x+m-4)! / (x-1)! (m-4)!$ ...時才會出現規律（此時下計算式

河內之塔的破解與改造

的  $x$  為 1 2 3 4 5)，因此將  $N$  的數值帶入下計算式求出  $x$ 、 $y$  最大值

$$(x+m-3)! / (x-1)! (m-3)! \leq N < (x+m-2)! / (x-1)! (m-2)!$$

$$N - (x+m-3)! / (x-1)! (m-3)! = y$$

由  $x$ 、 $y$  帶入下式，得到  $n$ （七根柱子移動所需的最少步數需要的步數）

$n$  為：

$$2x \cdot \{(x+m-4)! / (m-4)! x! - [(x+m-5)! / (m-5)! x! - \dots - 1] / (x-1)!\}$$

所以六根柱子的移動所需的最少步數的公式為：

$$2x \cdot \{(x+m-4)! / (m-4)! x! - [(x+m-5)! / (m-5)! x! - \dots - 1] / (x-1)! - 1$$

## 第六章、結論

### 1. 三根柱子的移動所需的最少步數

公式為：

令  $n$  為最少需要的步數， $x$  為完成的木片數。

$$n=2^x-1$$

### 2. 四根柱子的移動所需的最少步數

公式為：

令  $n$  為四根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的木片數，將  $N$  的數值帶入下計算式求出  $x$ 、 $y$  最大值

$$x(x+1)/2 \leq N < (x+1)(x+2)/2 \quad N-x(x+1)/2=y$$

由  $x$ 、 $y$  帶入下式，得到  $n$ （四根柱子移動所需的最少步數需要的步數）

$$n=2^x \cdot (x-1+y)-1$$

### 3. 五根柱子的移動所需的最少步數

公式為：

令  $n$  為五根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的木片數，將  $N$  的數值帶入下計算式求出  $x$ 、 $y$  最大值

$$x(x+1)(x+2)/6 \leq N < (x+1)(x+2)(x+3)/6 \quad N-x(x+1)(x+2)/6=y$$

由  $x$ 、 $y$  帶入下式，得到  $n$ （五根柱子移動所需的最少步數需要的步數）

$$n=2^x \cdot [x(x+1)/2-x+1+y]-1$$

### 4. 六根柱子的移動所需的最少步數

公式為：

令  $n$  為六根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的木片數，將  $N$  的數值帶入下計算式求出  $x$ 、 $y$  最大值

$$x(x+1)(x+2)(x+3)/24 \leq N < (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)/24 \quad N-x(x+1)(x+2)(x+3)/24=y$$

$$x(x+1)(x+2)(x+3)/24=y$$

由  $x$ 、 $y$  帶入下式，得到  $n$ （六根柱子移動所需的最少步數需要的步數）

$$n=2^x \cdot \{ x(x+1)(x+2)/6 - [x(x+1)/2-x+1]+y \} -1$$

### 5. 七根柱子的移動所需的最少步數

公式為：

令  $n$  為七根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的木片數，將  $N$  的數值帶入下計算式求出  $x$ 、 $y$  最大值

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)/120 \leq x < (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)/120$$

$$N - x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)/120 = y$$

由 x、y 帶入下式，得到 n（七根柱子移動所需的最少步數需要的步數）

$$n = 2^x \cdot x(x+1)(x+2)(x+3)/24 - \{ x(x+1)(x+2)/6 - [x(x+1)/2 - x + 1] + y \} - 1$$

### 6.m 根柱子的移動所需的最少步數

公式為：

令 n 為四根柱子移動所需的最少步數需要的步數，N 為完成的木片數，

將 N 的數值帶入下計算式求出 x、y 最大值

$$(x+m-3)! / (x-1)! (m-3)! \leq N < (x+m-2)! / (x-1)! (m-2)!$$

$$N - (x+m-3)! / (x-1)! (m-3)! = y$$

由 x、y 帶入下式，得到 n（七根柱子移動所需的最少步數需要的步數）

$$n = 2^x \cdot \{ (x+m-4)! / (m-4)! x! - [(x+m-5)! / (m-5)! x! - \dots - 1] / (x-1)! - 1$$

### 7. 木片數與柱子數移動次數關係

表九木片數與柱子數移動次數關係

木片數 \ 柱子數	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1
2	3	3	3	3	3	3
3	7	5	5	5	5	5
4	15	9	7	7	7	7
5	31	13	11	9	9	9
6	63	17	15	13	11	11
7	127	25	19	17	15	13

從上表可得知，柱子數越多，移動所需的最少步數就越少；木片數越多，移動所需的最少步數就越多

## 第七章、心得

雖然無法完成最初的研究「波的產生原理」，但也順利完成了和這個河內之塔的研究。從波的產生原理實驗一直到本研究河內之塔之最少步數與改造，我也學習到了非常多知識，更對數學有了更多的興趣。

這一趟學習之旅中，最令我印象深刻的就是專題研究發表會時心中的忐忑不安。做了幾個禮拜萬全的準備，每個人都蓄勢待發，將自己複雜的研究發表給小弟弟小妹妹及同班同學聽，但這件工作對我來說卻是比做研究還要更加困難的事。

而在這不斷地學習學習下，我發現我最應該加强的地方就是對於論文的修改，經過幾個月的辛苦運算，我雖然快速的做出了結論，但卻是因為論文的修改而造成進度落後。因此，我應該繼續加強我的文字溝通能力，才能讓我的研究更加完美。

這一整年來不斷地修改、計算、破解以及瘋狂的運算和猜測，也讓我達到所研究目的第六條所言：找出能套用任何柱子與木片移動所需的最少步數的公式，也使我十分興奮與開心。這一路來，我也感到十分幸運，能在求出這些花費心血堆成的結論，也更要感謝在我身旁的老師、家長及同學們，總是在我有困難時幫助我，總是在我有錯誤時引導我方向。

我也希望這幾項公式能為研究河內之塔的人們有幫助與貢獻。而這樣的結果，我還是要繼續改進，將還未化解的公式成為淺顯易懂的運算工具。而河內之塔神祕的所有寶藏，有些可能還未被發現，也期待未來能有更多的研究將河內之塔揭露所有的秘密。

## 第八章、參考文獻

民國 99 年第 50 屆全國中小學科展作品數學科第二名：數學 101～河內塔變身！

河內之塔—搬搬樂 <http://residence.educities.edu.tw/oddest/math183.htm>

河內之塔遊戲 <http://oddest.nc.hcc.edu.tw/math181.swf>

## 附錄、研究日誌

### 開始囉！

99.09.11

主題終於確定了，今天要去請教提供我主題靈感的老師——大自然科學教室的老師。

在姊姊下課後，我和媽媽說出所有研究上會遇到的困難與問題，老師也一一為我們解答。終於把實驗流程、可能遇到的困難、需要用的用具…等全部搞清楚，並且借了一個起架器。我決定明天就要開始第一次實驗。

### 第一次實驗

99.09.12

因為水波需要在陰暗分明的地方看才會明顯，因此我們將實驗時間延到晚上，並使用檯燈在水盆下照。首先先用架子將尺與十元硬幣放到 30 公分高的地方，結果發現：尺不夠長，不能連結到盆子的中間，因此將尺改為木板，也將「把木板抽掉」改為「用尺推下去」。接著我們就一直調整十元硬幣被推下去的位置，直到十元硬幣掉下去時會掉到正中間。調整完也畫上記號後，我們就把盆子拿去裝水。裝滿一半時，拿起來重量簡直有 5 公斤，而且稍微有一邊不平衡就很有可能倒下來。

最後我們終於將水盆安穩的放在桌上，並在下面打燈，讓燈光透過盆子照上出水波的樣子。但又因為十元硬幣的重量、底面積不適合，因此將十元硬幣換成彈珠。終於將所有的一難排除，唉～真是累人。

### 高度實驗

99.9.16

今天剛開始遇到的狀況，簡直跟第一次實驗一模一樣：水盆太重、燈光太暗、人手不夠…等。處理完這些「災難」後，就開始了我的「高度實驗」囉！

剛開始，我執意要用整數的高度進行測量，但我也馬上的發現這樣無法達到最準確的數值。因此我本起架器的最高高度量出來，並扣掉水的深度(9.4 公分)，最後得到—46 公分、再將他除以五—9.2 公分。現在我們將起架器的高度調整了又調整，但實在非常難剛好擺放在想要的高度。在「耐心」與「毅力」下終於完成了五個高度的實驗，而且每個高度也都錄影在相機中，我迫不及待的趕快打開影片瞧瞧。雖然效果不差，但也相當的…我真不知道要花多少時間才能找到數據。那麼，現在就趕快開始動工吧！

### 第一次專題研究審查會

99.10.7

好緊張！好緊張！今天是第一次的專題研究審查會。我爭先恐後的想要搶最後，沒想到竟是當第一個。

我將簡報打開，開始訴說我的報告。將報告全部解說完後，台下的學弟妹好像覺得很無聊、也聽不懂我在說什麼。

接著，是輪到老師講評的時候了！吳老和談老都先說我的實驗完整，但卻說我的第二個實驗假設不對：雖然加速度一樣，但重量較重的能量會越大(我怎沒想到？)。接著輪到邱老講了：我的實驗跟高中的物理學課本中實驗很像，建議我對波作更進一步的鑽研。還說我可以多多利用波的幾項公式。

沒錯！我這才明白我根本就還被蒙在鼓裡。所以今天，我要將所有老師的建議，全部加入我的報告中，讓我的報告也更加完美。

### 放棄和開始

99.10.7

波？我已經沒有任何想法，但也不想向我幾年來的成就說掰掰。夾在這兩個不同想法中，我受不了了！在一番的波折後，我終於願意捨去那不大可能成功的實驗，轉向我最新的研究—河內之塔。還記得前幾個禮拜，爸爸帶回了一盒遊戲，我破解了後，還想在繼續研究，也對他感到十分好奇，因此想設為專題研究的題材。現在就來祈禱這次的實驗不會在失敗了吧！

### 搜尋大戰

99.10.13

今天早上是運動會預演，而「好心」的老師並沒有出功課給我們。而我和我媽的一場搜尋大戰就此開始！我們從玩具反斗城，找到誠品旗艦店，帶結果還是一樣—沒找到河內之塔的玩具。最後，金黃色的陽光催促著我們要準備去上課，我只好兩手空空的回家，雖然夕陽燦爛，但我的心依舊很沉重。以後，將要怎麼辦？

結果還是跟我爸爸的同事借…

### 專題研究審查會

99.11.12

光陰似箭、歲月如梭，才一轉眼的時間就來到了專題研究審查會了。今天，我特別早起來，趕緊打包道具，衝向學校去。

審查會開始囉！我十分的緊張但還是將簡報裡的內容全部講了出來。接著，老師發問的時間到了！我拚命的點頭、拚命的說：「嗯嗯嗯！」才終於脫離了老師的追問。最後我得出了以下的幾個問題：

- 1.需要繼續做六根柱子、七根柱子的實驗。
- 2.四根柱子的實驗因證據不足，無法確認結論的真實性。
- 3.文件還有一些需要更改的，例如：電話、地址…

### 我的習慣

99.11.15

要對付這個河內之塔，我要編製出一種高超的技術，才不會每天像在黑暗中的蒼蠅，沒頭沒腦的亂撞。我反射性的將數據一一填入我的表格中，更自動地將他們的差距算出來，又列成了一大串數據。我又將數據看了看，馬上就發現了規律。我心頭竄出一陣興奮，想趕緊求出公式，但我不知道那有多難…

而我高超的技術就是：

- 1.將數據一一填入我的表格中
- 2.將他們的差距算出來
- 3.找到規律
- 4.求出公式

### 爆炸性的大突破

99.11.30

Y Y Y Y Y ~ 四根柱子的移動所需的最少步數簡直要把我逼瘋了！！今天，我又打開了一大堆的「密碼」，又感覺到一陣頭疼。結果我順手改了一個係數。「碰！」爆炸了！驗算一個個中獎，也就這樣解出來了。

而我的結論：

令  $n$  為四根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的移位數，

$$\frac{x(x+1)}{2} \leq N < \frac{(x+1)(x+2)}{2} \quad N - \frac{x(x+1)}{2} = y$$

$$2^x \cdot x(x+y-1) + 1$$

就這樣誕生於我的研究稿中囉！

### 沒概念？沒證據？

99.12.17

四根柱子已經成了過去式，迎面而來的是更強的敵人—五根柱子的挑戰。我用了我的「高超技術」，將資料、差距都填入表格。這時，我發現五根柱子根四根柱子也十分類似，只是四根柱子從  $2^x$  轉變成  $2^{x+1}$  的速度是 1、2、3、4…但五根柱子從  $2^x$  轉變成  $2^{x+1}$  的速度是 1、3、6…因為數字較大，得到的數據更少的微乎其微。

### 爆炸性的大突破 2

99.12.20

怎麼辦？數據不足，根本找不出任何的規律！數據收集完畢了，但差距居然只有 1、2、4、8 非常難確定關係。1 完全沒有規則、8 則還不知道是否結束了。原本要放棄的，竟發現—它們的個數分別是 1 3 6 10…不用想也知道，下一個數是 15（ $1=1$ 、 $3=1+2$ 、 $6=1+2+3$ 、 $10=1+2+3+4$ 、 $15=1+2+3+4+5$ ）。而不可能的事情也被破解，我將迎向最後階段—列出公式！

## 遠至夢想，近至計畫

100.1.3

上禮拜是專題研究進度報告，我整理了我的數據，得到如下：

	四根柱子的移動 所需的最少步數	五根柱子的移動所 需的最少步數	六根柱子的移動 所需的最少步數
完成進度	完成	已收集數據、 找出關係	已收集數據
預計完成日期	完成	十二月～放寒假前	放寒假～寒假結 束前
七根柱子的移動所需的最少步數		七根柱子的移動所需的最少步數	
完成進度	已收集數據	已收集數據	已收集數據
預計完成日期	三月～四月	四月～五月	

當然，如果我要達到長遠的計畫，我必須趕進度才行，才能在時間內，征服他。

## 我討厭電腦

100.1.26

寒假呀！最好的研究時期，但進度卻像死牛一樣，怎麼樣也趕不上進度。在連串的打字下，我覺得我簡直要瘋了！！這樣子還能求出來嗎？？？？？我將電腦換成書寫，雖然感覺暢快多了。果然還是用筆最自在。但我還是絞盡腦汁都想不出來。五根柱子，你究竟是何方神聖？

*The end of missing*

100.2.1

寒假快過了，映入眼簾的卻是一片片恐怖的進度以及一片死白。怎麼辦怎麼辦？？我今天到媽媽的辦公室，決心一定要在做寒假的最後一番苦戰。整個早上都還在與煩人的數字奮戰。

終於……一整片又驚人又簡單的關係呈現在我眼前，這是我的結論。五根六根七根以及綜合柱子，煩擾我整個寒假的難題一答案已經在不遠的前方了！！

*The end of missing 2*

100.2.9

我掏出一個禮拜前找到的一只勝利的鑰匙，進一步的去推算演練後，終於！我破解了！

令  $n$  為五根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的移位數，

$$x(x+1)(x+2)/6 \leq N < (x+1)(x+2)(x+3)/6 \quad N - x(x+1)(x+2)/6 = y$$

$n$  為：

$$\begin{aligned} & (2^x - 2^0) \cdot 1 + (2^x - 2^1) \cdot 2 + (2^x - 2^2) \cdot 3 \cdots (2^x - 2^{x-1}) \cdot x + 2^x y \\ & (2^x \cdot x - 2^x + 1) + (2^x \cdot (x-1) - 2^x + 2^1) + (2^x \cdot (x-2) - 2^x + 2^2) \cdots + (2^x \cdot 1 - 2^x + 2^{x-1}) + 2^x y \\ & 2^x \cdot x(x+1)/2 - [2^x x(x-1) + 1 (\text{四根柱子})] + 2^x y \\ & 2^x \cdot [x(x+1)/2 - x + 1] + 2^x y - 1 \end{aligned}$$

*The end of missing 3*

100.2.9

令  $n$  為六根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的移位數，

$$x(x+1)(x+2)(x+3)/24 \leq N < (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)/24 \quad N - x(x+1)(x+2)(x+3)/24 = y$$

$n$  為：

$$\begin{aligned} & (2^x - 2^0) \cdot 1 + (2^x - 2^1) \cdot 3 + (2^x - 2^2) \cdot 6 \cdots (2^x - 2^{x-1}) \cdot x(x+1) + 2^x y \\ & (2^x \cdot x - 2^x + 1) + (2^x \cdot (x-1) - 2^x + 2^1) + (2^x \cdot (x-2) - 2^x + 2^2) \cdots + (2^x \cdot 1 - 2^x + 2^{x-1}) + 2^x y \\ & 2^x \cdot \{x(x+1)/2 - [(x-1) + 1 (\text{四根柱子})]\} (\text{五根柱子}) + 2^x y \\ & 2^x \cdot [x(x+1)/2 - x + y + 1] - 1 \end{aligned}$$

*The end of missing 4*

100.2.13

由三～六根柱子的關係得知：

令  $n$  為六根柱子移動所需的最少步數需要的步數， $N$  為完成的移位數，

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)/120 \leq N < (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)/120 \quad N -$$

$$x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)/120 = y$$

$n$  為：

$$2^x \cdot x(x+1)(x+2)(x+3)/24 - \{x(x+1)(x+2)/6 - [x(x+1)/2 - x + 1]\} + 2^x y - 1$$

$$2^x \cdot x(x+1)(x+2)(x+3)/24 - \{x(x+1)(x+2)/6 - [x(x+1)/2 - x + 1] + y\} - 1$$

*The end of missing 5*

100.4.22

$$\{(x+m-4)! / (m-4)! x! - [(x+m-5)! / (m-5)! x! - \cdots - 1]$$

這是最後倒出來的公式，而這一部份也告一個段落了！

再來是甚麼難題呢？

## 勝利的高牆

100.5.16

公式破解了！距離勝利中還有一堵高牆——論文的修正。一直調整表格，修改文字，調整表格，修改文字，調整表格，修改文字，調整表格，修改文字。再加上馬上要來的專題研究發表會！這一堵高牆，只要我越過去，勝利應該就在不遠的地方了！

## 專題研究發表會

100.5.26

經過了一年的修改研究，就在這一天，我們的研究將在老師以及同學的面前呈現，也為了這重要的事情，我們早已開始準備。而在小教室發表的報告有何內之塔（我的）、藤本植物研究、不知道以及零島遊戲。而這場戰爭也在星期四，默默的開始轟炸了…

我在晨曦中踏進資優班中，為今天的發表會做準備，心中混合了興奮又緊張的感受。陸續地，越來越多人來到資優班開始整理。在十分鐘後就要開始，我拭著身上的汗，靜靜地看著時間一分一秒的過去，直到……外面傳來了陣陣的吵雜聲，班級抵達了，也宣示著發表會要開始了！

面對眼前的四年四班，我開始講說已經練習了好多天的台詞，而心中彷彿演奏著貝多芬的命運交響曲，起伏不定、跳動不停！河內之塔、河內之塔的介紹、研究動機、研究目的、研究流程、研究過程、研究結果以及最後的有獎徵答，多少文字在心中跳躍，而且還不忘要與台下的小弟弟、妹妹互動，使我漸漸陷入苦戰。

到了最高潮的部分了——有獎徵答時間，這是我的發表中的關鍵，也決定著我這場發表的好壞。當我提出令我也不相信有人能說出答案的問題時，奇蹟從天而降——每個人不僅熱烈的回答問題，更擊中正確答案許多次，讓我瞠目結舌。而第一場報告也在奇蹟的乍現下結束。

接著要發表給我們班——六年三班了。馬上就要向那些每天一起上課的傢伙報告了！我依然做著一樣的動作、講著一樣的台詞、抱著一樣的態度，唯一不一樣的一點，那就是台下冷漠的氣氛，簡直與上一場是天壤之別呢！

在有獎徵答助了我一臂之力下，終於結束了第一天的發表會，但是，我們的專題研究報告並未到此結束，還有論文的修改正等著我們！這場成功的發表會後面，還有一長段路得走呢！